

2.4.1 直线与圆锥曲线的交点(第二课时)

◆ 教学目标

- 1.会判断直线与抛物线、双曲线的位置关系.
- 2.利用直线与抛物线、双曲线的位置关系解决问题.

◆ 教学重难点

重点：判断直线与抛物线、双曲线的位置关系.

难点：利用直线与抛物线、双曲线的位置关系解决问题.

◆ 教学过程

一、新课导入

我们研究过了直线与椭圆的位置关系以及直线与椭圆交点坐标的求法，类比这种方法，我们能研究直线与抛物线、双曲线的位置关系吗？

二、新知探究

问题 1：类比直线与椭圆的位置关系可知直线与抛物线、双曲线有几种位置关系？

追问：直线与抛物线只有一个公共点，那么直线与抛物线一定相切吗？

思考 1：直线与抛物线的位置关系可以用代数法解决吗？

问题 2：如何判定直线与抛物线的位置关系？

思考 2：直线与双曲线的位置关系也可以用代数法解决吗？

问题 3：如何判定直线与双曲线的位置关系？

注意点：直线与双曲线的关系中：一解不一定相切，相交不一定两解，两解不一定同支.

三 应用举例

例1 已知直线 l 经过点 $A(0, 1)$ ，且与抛物线 $C: y^2 = x$ 有唯一的公共点，求直线 l 的方程.

变式探究1. 已知抛物线的方程为 $y^2=4x$ ，直线 l 过定点 $P(-2,1)$ ，斜率为 k . 当 k 为何值时，直线 l 与该抛物线：只有一个公共点；有两个公共点；没有公共点？

总结：判断直线与抛物线的位置关系的方法：

联立方程组消元：当二次项系数不等于零时，用判别式 Δ 来判定；

当二次项系数等于0时，直线与抛物线相交于一点.

例2 讨论直线 $l: y = kx + 1$ 与双曲线 $C: x^2 - y^2 = 1$ 的公共点的个数.

变式探究 2. 已知双曲线 $x^2 - y^2 = 4$ ，直线 $l: y = k(x - 1)$ ，试讨论实数 k 的取值围，使直线 l 与双曲线：

(1) 有且只有一个公共点； (2) 有两个公共点； (3) 没有公共点.

总结：直线与双曲线的位置关系的判断方法：

1. 代数法

将直线方程与双曲线方程联立，方程组的解的组数就是直线与双曲线交点的个数. 联立得方程组，消去 x 或 y 中的一个后，得到的形如二次方程的式子中，要注意 x^2 项或 y^2 项的系数是否为零，否则容易漏解.

2. 数形结合法

判断直线与双曲线的交点情况时，可以根据双曲线的渐近线的斜率与直线的斜率的大小关系，确定直线与双曲线的位置关系.

四、课堂练习

1. [多选题]过定点 $P(-1, 1)$ 且与抛物线 $y^2=2x$ 只有一个交点的直线 l 的方程为()

A. $y=-1$ C. $(\sqrt{3}-1)x-2y+\sqrt{3}+1=0$

B. $y=1$ D. $(1+\sqrt{3})x+2y+\sqrt{3}-1=0$

2. 若直线 $l: y=ax+1$ 与双曲线: $3x^2-y^2=1$ 的左、右两支各有一个公共点, 则实数 a 的取值范围是_____.

3. 已知抛物线方程为 $y^2=8x$, 若过点 $Q(-2,0)$ 的直线 l 与抛物线有公共点, 则直线 l 的斜率的取值范围是_____.

五、课堂小结

1. 直线与抛物线的位置关系:

判断直线是否与抛物线的对称轴平行: $\begin{cases} \text{平行: 直线与抛物线相交 (一个交点)} \\ \text{不平行: 计算判别式} \begin{cases} \Delta > 0: \text{两个交点;} \\ \Delta = 0: \text{一个交点;} \\ \Delta < 0: \text{没有交点.} \end{cases} \end{cases}$

2. 直线与双曲线的位置关系:

设直线与双曲线方程分别为: $y=kx+m$ 与 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,

联立方程组 $\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$, 消去 y 得 $(b^2-a^2k^2)x^2-2kma^2x+a^2(m^2+b^2)=0$.

1. 二次项系数为 0 时, 直线与双曲线的渐近线平行或重合. 重合: 无交点; 平行: 有一个交点.

2. 二次项系数不为 0 时, 上式为一元二次方程.

3. (1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 直线与双曲线有两个交点;

(2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 直线与双曲线有一个交点;

(3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 直线与双曲线没有交点.

六、布置作业

1. 若直线 $y=kx$ 与双曲线 $4x^2-y^2=16$ 相交, 则实数 k 的取值范围为()

A. $(-2,2)$ B. $[-2,2)$

C. $(-2,2]$ D. $[-2,2]$

2. 过点 $(0,1)$ 且与抛物线 $y^2=x$ 只有一个公共点的直线有()

A. 1 条 B. 2 条 C. 3 条 D. 无数条

3. 若直线 $l: x-2y=0$ 与双曲线 $x^2-ay^2=4(a>0)$ 的右支仅有一个公共点, 则 a 的取值范围是()

A. $(4, +\infty)$ B. $[4, +\infty)$

C. (0,4)

D. (0,4]

4. (多选)平面上一机器人在行进中始终保持与点 $F(1,0)$ 的距离和到直线 $x=-1$ 的距离相等, 若机器人接触不到过点 $P(-1,0)$ 且斜率为 k 的直线, 则 k 的值可以为()

A. -1 B. -2 C. 1 D. $\frac{3}{2}$

5. 直线 $y=kx+2$ 与抛物线 $y^2=8x$ 有且只有一个公共点, 则 $k=$ _____.

6. 设抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 F , 过点 $(-2,0)$ 且斜率为 $\frac{2}{3}$ 的直线与 C 交于 M, N 两点, 则 $\vec{FM} \cdot \vec{FN} =$ _____.

7. 抛物线 $y=-x^2$ 上的点到直线 $4x+3y-8=0$ 的距离的最小值是_____.

8. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 与直线 $y=2x$ 有交点, 则双曲线的离心率的取值范围是_____.

9. 设双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的右顶点为 A , 右焦点为 F , 过点 F 作平行于双曲线的一条渐近线的直线与双曲线交于点 B . 求: (1) B 点坐标; (2) $\triangle AFB$ 的面积.

10. 已知椭圆 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a>b>0)$ 过点 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3})$, 离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 过椭圆的上顶点作直线 l 交抛物线 $x^2=2y$ 于 A, B 两点, O 为坐标原点. 求证: $OA \perp OB$.

11. 如图, 已知抛物线 $C: y^2=2px (p>0)$ 的焦点为 F , 若过点 F 且斜率为 1 的直线与抛物线相交于 M, N 两点, 且 $|MN|=8$.

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 设直线 l 为抛物线 C 的切线, 且 $l \parallel MN$, P 为 l 上一点, 求 $\vec{PM} \cdot \vec{PN}$ 的最小值.

